MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4 KUTTA BERDASARKAN RATA-RATA GEOMETRI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

RONI
10754000219

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4 KUTTA BERDASARKAN RATA-RATA GEOMETRI

RONI
10754000219

Tanggal Sidang : 28 September 2011
Periode Wisuda : November 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas modifikasi metode RK4-Kutta berdasarkan rata-rata geometri. Metode RK-4 Kutta adalah salah satu metode iterasi satu langkah yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Modifikasi RK-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri, adalah sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1k_2} + 2\sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right)$$

Berdasarkan hasil kajian, diperoleh bahwa metode modifikasi RK-4 Kutta mempunyai orde galat $O(h^5)$.

Kata kunci : Deret Taylor, Metode RK4-Kutta, Persamaan Diferensial Biasa, Orde galat, Rata-rata Geometri.

DAFTAR ISI

Halaman

LEMBAR PERSETUJUAN ii
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL iv
LEMBAR PERNYATAAN v
LEMBAR PERSEMBAHAN vi
ABSTRAK vii
ABSTRACT viii
KATA PENGANTAR ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR SIMBOL xiii
DAFTAR TABEL xiv
DAFTAR GAMBAR xv
DAFTAR LAMPIRAN xvi

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah I-1
1.2 Rumusan Masalah I-2
1.3 Batasan Masalah I-3
1.4 Tujuan Penelitian I-3
1.5 Sistematika Penulisan I-3

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Differensial Biasa II-1
2.2 Deret Taylor II-5
2.3 Rata-Rata Geometri II-10
2.4 Deret Binomial II-10
2.5 Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta II-13

2.6 Galat Pemotongan II-18

BAB III METODOLOGI PENELITIAN III-1

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Berdasarakan Rata-rata Geometri IV-1

4.2 Galat Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Geometri IV-7

4.3 Simulasi Numerik IV-9

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan V-1

5.2 Saran V-2

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

DAFTAR SIMBOL

f'	: Turunan pertama
$\int$	: Integral
!	: Faktorial
∂	: Turunan parsial
x_0	: Nilai awal
$f_{(x)}$	: Fungsi dengan variabel bebas *x*
$\bar{x}$	: Nilai rata-rata *x*
RKK	: Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta
RKKG	: Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Geometri
RKKCH	: Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Contra Harmonik

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

2.1 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde-*n* II-14

2.2 Tabel Butcher RKK II-16

4.1 Galat Hasil Perhitungan $y' = \frac{1}{y}$ IV-9

4.2 Galat Hasil Perhitungan $y' = y$ IV-10

4.3 Galat Hasil Perhitungan $y' = \frac{-y^3}{2}$ IV-11

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan perkembangan ilmu matematika, para ilmuan terus mengembangkan teori-teori yang telah ada seperti persoalan mengenai persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial biasa yang sering dibahas yakni persamaan diferensial biasa orde satu, yaitu dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$

Untuk menyelesaikan persamaan (1.1) dapat dilakukan secara analitik dan menghasilkan solusi eksak. Namun tidak semua persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik, untuk itu dibutuhkan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan tersebut, dengan solusi berupa nilai hampiran. Metode numerik yang sering digunakan seperti Euler, Heun, Taylor, dan Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta dikenal sebagai metode yang memiliki ketelitian lebih baik dibandingkan dengan ketiga metode lainnya.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde-*n* adalah sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{1.2}$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$
$$\vdots$$
$$k_n = hf(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1})$$

Metode Runge-Kutta orde-4 klasik telah banyak dimodifikasi dari bentuk umumnya, misalnya modifikasi berdasarkan rata-rata aritmatik, seperti berikut

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right) \tag{1.3}$$

Selain menggunakan rata-rata aritmatik, modifikasi metode Runge-Kutta Orde-4 klasik berdasarkan rata-rata geometri telah dilakukan oleh Evans (1991), dan diperoleh

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\right) \tag{1.4}$$

Berdasarkan berbagai penelitian yang telah dilakukan untuk metode Runge-Kutta orde-4, maka Supinah (2010) mengembangkan modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata kontra harmonik, sehingga diperoleh :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right) \tag{1.5}$$

dengan

$$k_1 = f(y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + h\frac{k_1}{3}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{h}{18}\left(\left(5 - \sqrt{73}\right)k_1 + \left(7 + \sqrt{73}\right)k_2\right)\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + \frac{h}{6}\left(\left(2\sqrt{73} - 10\right)k_1 + \left(19 - 3\sqrt{73}\right)k_2 + \left(\sqrt{73} - 3\right)k_3\right)\right)$$

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, penulis tertarik untuk mengembangkan metode Runge-Kutta orde-4 Kutta dengan judul **“Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Geometri (RKKG)”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka dapat dirumuskan masalah dalam Tugas Akhir ini yaitu, “ Bagaimana menentukan rumusan modifikasi Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri “.

1.3 Batasan masalah

Pada Tugas Akhir ini penulis membatasi permasalahan pada modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa orde satu.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumusan baru dari modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri.

1.5 Sistematika Penulisan

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan menguraikan latar belakang pemilihan judul, tujuan, rumusan masalah, batasan masalah, serta sistematika penulisan tugas akhir.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori berisikan tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk pengembangan tulisan tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang metode-metode yang dilakukan untuk memperoleh data dan hasil yang dibutuhkan dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB IV Pembahasan

Bab pembahasan berisi langkah-langkah dan hasil dari pembuktian persamaan Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri.

BAB V Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dibahas beberapa teori yang merupakan dasar untuk melakukan modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta yaitu, sebagai berikut :

2.1 Persamaan Differensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial biasa orde satu ini dibahas karena hasil modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut.

Persamaan diferensial biasa orde-*n* mempunyai bentuk umum,

$$F\left(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}\right) = f(x) \tag{2.1}$$

dengan tanda aksen menunjukkan turunan terhadap *x* atau disebut dengan orde yaitu $y' = \frac{dy}{dx}$ disebut orde pertama, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ disebut orde kedua dan seterusnya sampai orde-*n*. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai berikut :

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$.

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dilakukan berdasarkan jenis persamaannya, yakni :

a. Persamaan Variabel Terpisah

Perhatikan suatu persamaan diferensial berikut :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.3}$$

Pemisahan variabel dapat dilakukan jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ dapat dijadikan dua faktor yang terdiri dari variabel *x* saja dan *y* saja. Jadi,

$$M(x, y) = f_1(x)h_1(y) \quad \text{dan} \quad N(x, y) = f_2(x)h_2(y)$$

Sehingga persamaan (2.3) dapat ditulis:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x)h_1(y)}{f_2(x)h_2(y)}$$

Pisahkan variabel *x* dan *y* , masing-masing dalam satu kelompok

$$\frac{h_2(y)}{h_1(y)}dy = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$$

Untuk memperoleh penyelesaiannya, integralkan kedua ruas.

Contoh 2.1 Tentukan solusi pesamaan diferensial berikut :

$$y' = 5y \text{ , } y(0) = 1$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = 5y$$

ubah dalam bentuk terpisah

$$\frac{dy}{y} = 5\ dx$$

integralkan kedua ruas

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx$$

$$\ln|y| = 5x + c$$

$$y = e^c e^{5x}$$

jadi solusinya umumnya yaitu :

$$y = C\ e^{5x}$$

oleh karena $y(0) = 1$ maka

$$C\ e^{5.0} = y(0)$$

$$C = 1$$

Sehingga solusi khususnya adalah

$$y = e^{5x}$$

b. Persamaan Eksak

Jika terdapat suatu fungsi $g(x, y)$pada persamaan (2.3) sehingga berbentuk :

$$g(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2.4}$$

Maka persamaan (2.4) dikenal sebagai persamaan diferensial eksak. Sedangkan persamaan tersebut dikatakan eksak jika dan hanya jika $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Contoh 2.2 Tentukan solusi pesamaan diferensial berikut :

$$(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0 \text{ , } y(0) = 1$$

Penyelesaian :

Dari bentuk persamaan diferensial berikut :

$$(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0$$

dapat kita peroleh bahwa,

$$M(x, y) = y - 3x^2 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ dan}$$

$$N(x, y) = (x - 1) \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

oleh karena

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Maka persamaan tersebut adalah eksak, selanjutnya integralkan $M(x, y)$ terhadap x, sehingga diperoleh :

$$F(x, y) = \int M(x, y)\ dx + h(y)$$

$$= \int (y - 3x^2)dx + h(y)$$

$$= xy - x^3 + h(y)$$

selanjutnya turunkan persamaan $F(x, y)$ terhadap ∂y , diperoleh :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + h'(y)$$

selanjutnya substitusikan $N(x, y)$ terhadap $\frac{\partial F}{\partial y}$. Kemudian selesaikan bentuk $h'(y)$ dengan mengintegralkannya

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

$$x + h'(y) = x - 1$$

$$h'(y) = -1$$

$$h(y) = -y$$

Jadi $F(x, y) = -x^3 + xy - y$ dan penyelesaian implisitnya adalah :

$$xy - x^3 - y = C$$

Sehingga diperoleh penyelesaian umumnya :

$$y = \frac{x^3 + C}{x - 1}$$

oleh karena $y(0) = 1$ maka :

$$y(0) = \frac{0^3 + C}{0 - 1}$$

$$1 = \frac{C}{-1}$$

$$C = -1$$

Sehingga solusi khususnya adalah :

$$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

c. Persamaan Diferensial Linier

Persamaan diferensial orde satu linear memiliki bentuk :

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (2.5)$$

dengan faktor integrasinya adalah :

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} \qquad (2.6)$$

Persamaan (2.5) hanya bergantung pada x dan independen terhadap y. Jika persamaan (2.6) dikalikan ke persamaan (2.5) maka :

$$I(x)y' + p(x)I(x)y = q(x)I(x) \qquad (2.7)$$

Contoh 2.3 Tentukan solusinya pesamaan diferensial berikut :

$$y' - 2xy = x\ ,\ y(0) = 1$$

Penyelesaian :

persamaan ini memiliki bentuk $p(x) = -2x$ dan $q(x) = x$ dan berbentuk linear maka :

$$\int p(x)dx = \int -2x\, dx = -x^2$$

Sehingga faktor integrasinya adalah :

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$= e^{-x^2}$$

Kalikan faktor integrasi pada persamaan, sehingga

$$e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - e^{-x^2}2xy = xe^{-x^2}$$

dan diperoleh :

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}y\right] = xe^{-x^2}$$

$$\int d[\,e^{-x^2}y] = \int xe^{-x^2}dx$$

$$e^{-x^2}y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

jadi penyelesaian umumnya adalah :

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

oleh karena $y(0) = 1$ maka :

$$y(0) = -\frac{1}{2} + ce^{-0^2}$$

$$1 = -\frac{1}{2} + c.1$$

$$1 = -\frac{1}{2} + c$$

$$C = \frac{1}{2} + 1$$

$$C = \frac{3}{2}$$

Sehingga solusi khususnya adalah :

$$y = \frac{3}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}$$

2.2 Deret Taylor

Teorema 2.1 (Munir, 2006) Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada selang [a,b], maka untuk nilai-nilai *x* disekitar x_0 dan $x \in [a,b], f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) kedalam deret Taylor, maka:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\ f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.8}$$

Apabila $h = b - a$ atau $b = a + h$ maka persamaan (2.8) dapat dinyatakan sebagai :

$$f(b) = f(a) + hf^{'}(a) + \frac{h^2}{2!}\ f^{''}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2.9)$$

Bukti deret Taylor satu variabel

Berdasarkan teorema dasar kalkulus diperoleh persamaan :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

atau

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx \qquad (2.10)$$

dengan menerapkan integral parsial pada suku kedua ruas kanan dari persamaan (2.10) dan memisalkan dengan

$$u = f^{'}(x) \ \rightarrow du = f"(x)dx\ ,\ \ dv = dx\ \rightarrow v = x$$

dengan *b* adalah konstanta terhadap peubah *x*, maka :

$$\int_a^b f^{'}(x)dx = f^{'}(x)(x)|_a^b - \int_a^b (x)f"(x)\,dx$$

$$\int_a^b f^{'}(x)dx = f^{'}(x)(b-a) - \int_a^b (x)f"(x)dx \qquad (2.11)$$

Substitusikan persamaan (2.11) ke dalam persamaan (2.10), maka diperoleh :

$$f(b) = f(a) + f^{'}(x)(b-a) - \int_a^b (x)f"(x)dx \qquad (2.12)$$

Selanjutnya, dengan menerapkan kembali integral parsial pada bentuk $\int_a^b (x)f"(x)dx$ maka

$$u = f^{''}(x) \rightarrow du = f^{'''}(x)dx\ , \qquad dv = -x\,dx \rightarrow v = -\frac{x^2}{2}$$

maka diperoleh :

$$\int_a^b f"(x)(x)dx = f"(x)\frac{-x^2}{2}|_a^b - \int_a^b -\frac{(x)^2}{2}f^{'''}(x)dx \qquad (2.13)$$

dan dengan memasukkan persamaan (2.13) ke persamaan (2.12) akan didapatkan

$$f(b) = f(a) + f^{'}(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f^{'''}(x)dx \quad (2.14)$$

Apabila proses tersebut dilakukan secara terus-menerus sebanyak n kali, maka akan diperoleh suatu deret yang disebut **deret Taylor**.

$$f(b) = f(a) + f^{'}(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$
$$+R_n(b) \quad (2.15)$$

dengan

$$R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(a)(b-a)^n dx}{(n+1)!} \quad \blacksquare$$

Misalkan, $a = x_0$, $b = x_0 + h$ dan $R_n(b) = O(h^{n+1})$, untuk $k = 0,1,2, \dots, n$ maka ekspansi $f(x_0 + h)$ di sekitar x_0, diberikan oleh :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f^{'}(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{n+1}(x_0)}{n!}h^{n+1}$$
$$+\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (2.16)$$

Pada penyelesaian persamaan differensial biasa orde satu menggunakan deret Taylor sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

atau

$$y' = f$$

Bentuk turunan persamaan differensial dalam bentuk f untuk orde-orde yang lebih tinggi dapat ditulis sebagai berikut :

$$y'' = f_x + y'f_y$$
$$= f_x + ff_y \quad (2.17)$$
$$y^{'''} = f_{xx} + 2y'f_{xy} + y''f_y + f_{yy}(y^{'})^2$$
$$= f_{xx} + 2ff_{xy} + f_xf_y + ff_y^2 + f^2f_{yy} \quad (2.18)$$

$$y^{(4)} = f_{xxx} + 3y'f_{xxy} + 3y''f_{xy} + y'''f_y + 3(y')^2 f_{xyy} + 3y'y''f_y + f_{yyy}(y')^3$$
$$= f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy} + 4f^2 f_x f_{yy}$$
$$+f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_x f_y^2 + ff_y^3 \quad (2.19)$$
$$y^{(5)} = f_{xxxx} + 4y'f_{xxxy} + 6y''f_{xxy} + 4y'''f_{xy} + y^{(4)} f_y + 4(y')^3 f_{xxyy}$$
$$+4(y')^2 f_{xyy} + 6(y'')^2 f_{yy} + 4y'y'' f_{xyyy} + 6(y')^2 y'' f_{yyy} + f_{yyyy}(y')^4$$
$$= f_{xxxx} + 4ff_{xxxy} + 6(f_x + ff_y) f_{xxy} + 4(f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + ff_y^2$$
$$+f^2 f_{yy}) f_{xy} + (f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy}$$
$$+3ff_y f_{yy} + 4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_x f_y^2 + ff_y^3) f_y + 4f^3 f_{xxyy}$$
$$+4f^2 f_{xyy} + 6\left(f_x + ff_y\right)^2 f_{yy} + 4f(f_x + ff_y) f_{xyyy} + 6f^2\left(f_x +\right.$$
$$\left. ff_y\right) f_{yyy} + f_{yyyy} f^4 \quad (2.20)$$

Deret Taylor hampiran y_{i+1} yang diekspansi disekitar y_i dapat ditulis sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{3!} y_i^{(3)} + \cdots + \frac{h^n}{n!} y_i^{(n)} \quad (2.21)$$

selanjutnya persamaan (2.17) – (2.20) disubstitusikan kedalam persamaan (2.21) sehingga deret Taylornya dapat ditulis sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + ff_y\right)$$
$$+\frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2\right)$$
$$+\frac{h^4}{24}\left(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy}\right.$$
$$\left.+4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_x f_y^2 + ff_y^3\right)$$
$$+\frac{h^5}{120}\left(f_{xxxx} + 4ff_{xxxy} + 6f_x f_{xxy} + 6ff_y f_{xxy}\right.$$
$$+4(f_{xy} f_{xx} + 2ff_{xy}^2 + f_x f_y f_{xy} + ff_y^2 f_{xy} + f^2 f_{yy} f_{xy})$$
$$+(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy}$$
$$+4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_x f_y^2 + ff_y^3) f_y$$
$$+4f^3 f_{xxyy} + 4f^2 f_{xyy} + 6\left(f_x + ff_y\right)^2 f_{yy} + 4f(f_x + ff_y) f_{xyyy}$$
$$\left.+6f^2(f_x + ff_y) f_{yyy} + f_{yyyy} f^4\right) \quad (2.22)$$

Selanjutnya dengan hanya mengambil turunan terhadap y pada persamaan (2.22) maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned}y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}\left(f {f_y}^2 + f^2 f_{yy}\right) \\ + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3\right) \\ + \frac{h^5}{120}\left(f_{yyyy} f^4 + 7 f_{yyy} f^3 f_y + 11 f_{yy} f^2 f_y^2 + f_y^4 f\right)\end{aligned} \quad (2.23)$$

Contoh 2.4 Hampirilah fungsi $f(x) = \sin(x)$ dengan deret Taylor di sekitar $x_0 = 0.1$. Hitunglah nilai hampiran untuk $x = 1$ atau $f(1)$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}&f(x) = \sin(x) \rightarrow f(0.1) = \sin(0.1) = 0.099833 \\ &f'(x) = \cos(x) \rightarrow f(0.1) = \cos(0.1) = 0.995004 \\ &f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f(0.1) = -\sin(0.1) = -0.099833 \\ &f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f(0.1) = -\cos(0.1) = -0.995004 \\ &f^{(4)}(x) = \sin(x) \rightarrow f(0.1) = \sin(0.1) = 0.099833 \\ &\qquad \vdots\end{aligned}$$

Maka, berdasarkan persamaan (2.15), $\sin(x)$ dihampiri dengan deret Taylor sebagai berikut :

$$\begin{aligned}f(x) = \sin x = f(0.1) + \frac{(x-0.1)}{1!} f'(0.1) + \frac{(x-0.1)^2}{2!} f''(0.1) \\ + \frac{(x-0.1)^3}{3!} f'''(0.1) + \frac{(x-0.1)^4}{4!} f^{(4)}(0.1) + \cdots\end{aligned}$$

Untuk $h = x - 0.1$, maka :

$$\begin{aligned}f(x) = \sin x = f(0.1) + \frac{h}{1!} f'(0.1) + \frac{h^2}{2!} f''(0.1) + \frac{h^3}{3!} f'''(0.1) \\ + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(0.1) + \cdots\end{aligned}$$

Untuk $x = 1$, maka $h = 1 - 0.1 = 0.9$ dan nilai hampirannya adalah :

$$\begin{aligned}f(1) = \sin(1) &\approx 0.099833 + \frac{0.9}{1!} \times 0.995004 - \frac{(0.9)^2}{2!} \times 0.099833 \\ &\quad - \frac{(0.9)^3}{3!} \times 0.995004 + \frac{(0.9)^4}{4!} \times 0.099833 + \cdots \\ &\approx 0.099833 + 0.895504 - 0.040432 - 0.120892 \\ &\quad + 0.002729 + \cdots\end{aligned}$$

$$f(1) = \sin(1) \approx 0.836742$$

2.3 Rata-Rata Geometri

Rata-rata geometri dari sebuah *n* himpunan adalah perkalian setiap nilai dari himpunan tersebut kemudian dibentuk menjadi akar pangkat *n.*

Definisi 2.1 (Miller, 2003) Rata-rata geometri dari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ adalah

$$GM = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n} \tag{2.24}$$

Rata-rata geometri dengan $n = 2$

$$GM = \sqrt{a_1 \times a_2}$$

Contoh 2.5 Carilah nilai rata-rata geometri dari himpunan :

a. 2, 8
b. 1, ½, ¼

Penyelesaian :

a. $\sqrt{2 \times 8} = 4$
b. $\sqrt[3]{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

2.4 Deret Binomial

Teorema 2.2 (Martono, 1999) Untuk bilangan real *p*, fungsi $f(x) = (1+x)^p$ dapat dinyatakan sebagai deret Mac Laurin pada selang (-1,1) yang berbentuk :

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots \quad , |x| < 1 \tag{2.25}$$

dengan

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!\,(p-n)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}; n = 0,1,2,\dots$$

Bukti :

Pertama, akan ditentukan terlebih dahulu jari-jari kekonvergenannya, misalkan

$$u_n = \binom{p}{n}x^n$$

karena

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{p}{n+1}x^{n+1}}{\binom{p}{n}x^n}\right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)(p-n)}{(n+1)!}}{\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{p-n}{n+1}\right| = |x| \qquad (2.26)$$

maka berdasarkan uji banding diperoleh bahwa deret pangkatnya konvergen bila $|x| < 1$ dan divergen bila $|x| > 1$. Jadi jari-jari kekonvergenan deret pangkatnya adalah $r = 1$.

Andaikan

$$y = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots, |x| < 1 \qquad (2.27)$$

Akan ditunjukkan

$$y = g(x) = f(x) = (1+x)^p$$

Dari persamaan (2.27), diperoleh nilai $y(0) = 1$.

Karena jari-jari kekonvergenan deret pangkat adalah $r = 1$, berarti fungsi g terdeferensialkan pada selang $(-1,1)$ dengan :

$$y' = g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n-1}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{p}{n} x^n, |x| < 1 \qquad (2.28)$$

Dengan mangalikan persamaan (2.28) dengan x ,diperoleh :

$$xy' = xg'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^{n-1}. x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^n, |x| < 1$$

Karena deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{p}{n} x^n$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} n \binom{p}{n} x^n$ konvergen mutlak untuk $|x| < 1$, maka kedua deret ini dapat dijumlahkan suku demi suku. Hasilnya adalah :

$$y' + xy' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{p}{n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{p}{n}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)\binom{p}{n+1} + n\binom{p}{n}\right)x^n$$

karena

$$(n+1)\binom{p}{n+1} + \ n\binom{p}{n} = p\binom{p}{n}$$

maka

$$y' + xy' = p\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n = py$$

Jadi diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$(1+x)y' = py$, dengan $y(0) = 1$ (2.29)

Yang dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah, yaitu sebagai berikut :

$$(1+x)y' = py$$

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = py$$

$$\frac{dy}{y} = p\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y| = p\ln|1+x| + \ln c \ ,c > 0$$

$$= \ln c|1+x|^p$$

$$|y| = c|1+x|^p, c > 0 \rightarrow y = c(1+x)^p \ ,c \neq 0$$

Karena $y(0) = 1$, maka $1 = c(1+0)^p$, sehingga $c = 1$. Sehingga solusi untuk (2.29) adalah :

$$y = (1+x)^p$$

Dengan demikian terbukti bahwa :

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots \ ,|x| < 1 \ \blacksquare$$

Contoh 2.6 Tentukanlah ekspansi binomial dari $f(x) = (1+x)^{1/2}$

Penyelesaian :

Dari $f(x) = (1+x)^{1/2}$, diperoleh :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-1/2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-5/2}$$

Untuk $x = 0$, maka :

$$f'(0) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f''(0) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f'''(0) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

Sehingga diperoleh deret binomial sebagai berikut :

$$(1+x)^{1/2} = 1 + (1/2)x + \frac{(1/2)(-1/2)x^2}{2!} + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)x^3}{3!} + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)x^4}{4!} + \cdots$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \tag{2.30}$$

2.5 Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan menggunakan deret Taylor tidak praktis karena metode ini membutuhkan perhitungan turunan $f(x,y)$. Selain itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret taylor, semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor dan tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde-*n* yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{2.31}$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$

...

$$k_n = hf(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1})$$

Metode Runge-Kutta dengan *n* langkah dapat ditunjukkan kedalam sebuah tabel. Tabel ini dikenal sebagai Tabel Butcher, berikut adalah bentuk umum Metode Runge-Kutta digambarkan dalam sebuah Tabel Butcher.

Tabel 2.1 Tabel Butcher Metode Runge-Kutta orde-*n*

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_1 & q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_2 & q_{21} & q_{22} & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p_{n-1} & q_{n-1,1} & q_{n-2,2} & \cdots & q_{n-1,n-1} & 0 \\
\hline
 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n
\end{array}
$$

Berikut ini adalah persamaan umum metode Runge-Kutta orde empat :

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4) \tag{2.32}$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$
$$k_4 = f(x_i + p_3h, y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)$$

Persamaan Runge-Kutta diatas memiliki tiga belas konstanta. Untuk memperoleh nilai $a_1, a_2, a_3, a_4, p_1, p_2, p_3, q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33} adalah dengan cara menjabarkan k_1, k_2, k_3, dan k_4 dalam bentuk deret Taylor, sehingga diperoleh :

$$k_1 = f \tag{2.33}$$

$$k_2 = f(y_i + q_{11}k_1)$$
$$= f + hq_{11}ff_y + \frac{h^2}{2}q_{11}^2f^2f_{yy} + \frac{h^3}{6}q_{11}^3f^3f_{yyy} + \cdots \tag{2.34}$$

$$k_3 = f(y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$
$$= f + h(q_{21} + q_{22})ff_y + h^2\left(q_{21}q_{22}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{21} + q_{22})A^2f^2f_{yy}\right)$$
$$+h^3\left(\frac{1}{2}q_{21}^2q_{22}f^2f_yf_{yy} + q_{21}(q_{21} + q_{22})q_{22}f^2f_yf_{yy}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}(q_{21} + q_{22})^3f^3f_{yyy}\right) + \cdots \tag{2.35}$$

$$k_4 = f(y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)$$

$$= f + h(q_{31} + q_{32} + q_{33})ff_y + h^2\Big(q_{21}q_{32}ff_y^2 + (q_{21} + q_{22})q_{33}ff_y^2$$

$$+\frac{1}{2}(q_{31} + q_{32} + q_{33})^2 f^2 f_{yy}\Big)$$

$$+h^3\left(\frac{1}{2}q_{21}^2 q_{32}(q_{31} + q_{32} + q_{33})f^2 f_y f_{yy} + q_{33}\frac{(q_{21} + q_{22})^2}{2}f^2 f_y f_{yy}\right.$$

$$+(q_{31} + q_{32} + q_{33})\big(q_{21}q_{32} + q_{33}(q_{21} + q_{22})\big)f^2 f_y f_{yy}$$

$$\left.+q_{33}q_{32}q_{21}ff_y^3 + \frac{1}{6}(q_{31} + q_{32} + q_{33})^3 f^3 f_{yyy}\right) + \cdots \quad (2.36)$$

Untuk mempermudah mendapatkan nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, q_{11}, q_{21}, q_{22}$, q_{31}, q_{32} dan q_{33} dengan memisalkan $q_{21} + q_{22} = A$ dan $q_{31} + q_{32} + q_{33} = B$ pada persamaan (2.33) – (2.36) sehingga diperoleh :

$$k_1 = f \quad (2.37)$$

$$k_2 = f(y_i + q_{11}k_1)$$

$$= f + hq_{11}ff_y + \frac{h^2}{2}q_{11}^2 f^2 f_{yy} + \frac{h^3}{6}q_{11}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \quad (2.38)$$

$$k_3 = f(y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

$$= f + hAff_y + h^2\left(q_{21}q_{22}ff_y^2 + \frac{1}{2}A^2 f^2 f_{yy}\right)$$

$$+h^3\left(\frac{1}{2}q_{21}^2 q_{22}f^2 f_y f_{yy} + q_{21}Aq_{22}f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6}A^3 f^3 f_{yyy}\right) + \cdots \quad (2.39)$$

$$k_4 = f(y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)$$

$$= f + hBff_y + h^2\left(q_{21}q_{32}ff_y^2 + Aq_{33}ff_y^2 + \frac{1}{2}B^2 f^2 f_{yy}\right)$$

$$+h^3(\frac{1}{2}q_{21}^2 q_{32}Bf^2 f_y f_{yy} + q_{33}\frac{A^2}{2}f^2 f_y f_{yy} + B(q_{21}q_{32} + q_{33}A)f^2 f_y f_{yy}$$

$$+q_{33}q_{32}q_{21}ff_y^3 + \frac{1}{6}B^3 f^3 f_{yyy}) + \cdots \quad (2.40)$$

Selanjutnya subsitusikan persamaan (2.37) – (2.40) kedalam persamaan (2.32), dengan menggunakan penyelesaian pendekatan deret Taylor untuk mendapatkan parameter tersebut, sehingga diperoleh :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$a_2 q_{11} + a_3 A + a_4 B = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11}^2 + a_3 A^2 + a_4 B^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 q_{11}^3 + a_3 A^3 + a_4 B^3 = \frac{1}{4}$$
$$a_3 q_{22} q_{11} + a_4 q_{32} q_{11} + a_4 q_{33} A = \frac{1}{6}$$
$$a_3 q_{22} q_{11}^2 + a_4 q_{32} q_{11}^2 + a_4 q_{33} A^2 = \frac{1}{12}$$
$$a_3 q_{11} q_{22} A + a_4 B(q_{11} q_{32} + q_{33} A) = \frac{1}{8}$$
$$a_4 q_{33} q_{22} q_{11} = \frac{1}{24} \tag{2.41}$$

Persamaan (2.41) terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter, kemudian diambil 3 parameter bebas, yaitu :

$$q_{11} = \frac{1}{3}, A = \frac{2}{3}, B = 1 \tag{2.42}$$

Substitusikan 3 parameter $q_{11,}, A, B$ ke persamaan (2.41) dan diperoleh :

$$q_{11} = \frac{1}{3},\ q_{21} = -\frac{1}{3},\ q_{22} = 1, q_{31} = 1, q_{32} = -1, q_{33} = 1$$
$$a_1 = \frac{1}{8}, a_2 = \frac{3}{8}, a_3 = \frac{3}{8}, a_4 = \frac{1}{8} \tag{2.43}$$

Kemudian substitusikan (2.42) dan (2.43) pada (2.32), sehingga diperoleh rumus metode Runge-Kutta orde-4 Kutta pada selang $[a, b]$ sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \qquad i = 0, 1, 2, \dots, \frac{b-a}{h} \tag{2.44}$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3})$$
$$k_3 = hf(x_i + \frac{2h}{3}, y_i - \frac{k_1}{3} + k_2)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3)$$

Berikut ini adalah Runge-kutta orde empat Kutta dalam bentuk Tabel Butcher :

Tabel 2.2 Tabel Butcher Metode Runge Kutta orde-4 Kutta

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

Contoh 2.7 Dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 Kutta tentukan penyelesaian masalah nilai awal berikut ini :

$y' = y,\ \ y(0) = 1 \quad h = 0.01$ pada selang [0,1].

Penyelesaian :

Terlebih dahulu akan ditentukan solusi eksak yaitu :

$$\frac{dy}{dx} = y$$

dengan menggunakan metode variabel terpisah maka akan didapatkan :

$$y = Ce^x$$

Untuk $y(0) = 1$ maka $C = 1$ sehingga diperoleh solusi eksak :

$$y(x) = e^x$$

Sedangkan solusi hampiran dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 (Kutta) adalah sebagai berikut :

- Iterasi pertama:

$$k_1 = hy_0$$
$$= 0.01$$
$$k_2 = y_0 + \frac{hk_1}{3}$$
$$= 1.00003$$
$$k_3 = y_0 + h(\frac{k_1}{3} + k_2)$$
$$= 1.01003$$
$$k_4 = y_0 + h(k_1 - k_2 + k_3)$$
$$= 1.00020$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$
$$= 1.00880$$

- Iterasi kedua:

$$k_1 = hy_1$$
$$= 0.010088$$
$$k_2 = y_1 + \frac{hk_1}{3}$$
$$= 1.009136$$

$$k_3 = y_1 + h(\frac{k_1}{3} + k_2)$$
$$= 1.018925$$
$$k_4 = y_1 + h(k_1 - k_2 + k_3)$$
$$= 1.008999$$
$$y_2 = y_1 + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$
$$= 1.017679$$

Lakukan proses iterasi diatas secara terus-menerus sampai pada selang [0.1].

2.6 Galat Pemotongan

Pada aproksimasi polinomial di titik $n + 1$ data, terdapat perbedaan atau galat terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan galat pemotongan. Dengan mensubstitusikan sebuah derajat polinomial $p + 1$ ke dalam rumus orde p dapat dibangun sebuah bentuk galat :

$$T(x,h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\varepsilon) \tag{2.45}$$

Aplikasi Algoritma dan proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum ditulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h) \qquad n = 0,1,2, \dots$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan *h*. definisikan *y*(*x*) sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap *x* akan berlaku:

$$T(x,h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x+h) \tag{2.46}$$

Galat metode Runge-Kutta orde-4 Kutta

Untuk mendapatkan galat dari metode Runge Kutta orde-4 Kutta dilakukan dengan menggunakan langkah-langkah yang sama untuk menentukan nilai parameter metode Runge Kutta orde-4 Kutta yang telah dibahas dalam sub bab 2.5 sebelumnya.

Nilai parameter $q_{11}, q_{21,} q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33} yang telah disubstitusikan ke dalam persamaan (2.32) akan menghasilkan nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada persamaan (2.44). Nilai-nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 inilah yang kemudian diekspansikan kedalam deret Taylor sampai h^5. Kemudian dengan prosedur yang sama pada persamaan (2.37) – (2.41) maka diperoleh :

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}\left(f {f_y}^2 + f^2 f_{yy}\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3\right)$$

$$+h^5\left(\frac{11}{1296} f^4 f_{yyyy} + \frac{107}{1296} f^3 f_y f_{yyy} + \frac{5}{144} f^3 f_{yy}^2 + \frac{1}{6} f^2 f_y^2 f_{yy}\right) \quad (2.47)$$

Kemudian bandingkan hasil (2.47) dengan ekspansi Taylor dari y_{i+1} sampai h^5 seperti pada persamaan (2.23), yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}\left(f {f_y}^2 + f^2 f_{yy}\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3\right)$$

$$+\frac{h^5}{120}\left(f_{yyyy} f^4 + 7 f_{yyy} f^3 f_y + 11 f_{yy} f^2 f_y^2 + f_y^4 f\right)$$

Sehingga diperoleh galat metode Runge Kutta orde-4 Kutta sebagai berikut :

$$\text{Galat} = h^5\left(\frac{1}{6480} f^4 f_{yyyy} - \frac{107}{1296} f^3 f_y f_{yyy} - \frac{5}{144} f^3 f_{yy}^2 + \frac{3}{40} f^2 f_y^2 f_{yy}\right)$$

atau dapat ditulis sebagai :

$$\text{Galat} = \frac{h^5}{6480}\left(f^4 f_{yyyy} + 535\, f^3 f_y f_{yyy} - 225 f^3 f_{yy}^2 + 486\, f^2 f_y^2 f_{yy}\right) \quad (2.48)$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan Tugas Akhir ini hanya membahas secara teori modifikasi metode Runge-Kutta orde 4 Kutta. Oleh karena itu, penelitian dilakukan dengan menggunakan metode studi pustaka yang berguna untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan baik berasal dari buku-buku, jurnal, maupun sumber-sumber dari internet.

Dalam penelitian ini akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Memperkenalkan bentuk metode Runge Kutta orde-4 Kutta (RKK), pada persamaan (2.44), yaitu :

   $$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

   dengan

   $$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

   $$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3})$$

   $$k_3 = hf(x_i + \frac{2h}{3}, y_i - \frac{k_1}{3} + k_2)$$

   $$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3)$$

2. Metode RKK tersebut dibentuk menjadi RKK yang mengandung unsur aritmatik, selanjutnya mensubstitusikannya dengan rata-rata geometri, sehingga menghasilkan persamaan baru yang disebut sebagai metode Runge-Kutta orde-4 berdasarkan rata-rata geometri (RKKG).
3. Menentukan nilai parameter RKKG dengan menggunakan software Maple.
4. Substitusikan nilai parameter yang telah didapat ke dalam bentuk RKKG.
5. Simulasi numerik dengan menggunakan software Matlab.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang teknik memodifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri, selanjutnya pengaplikasian rumus yang telah didapat ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde satu.

4.1 Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Geometri

Metode Runge-Kutta orde-4 klasik telah banyak di modifikasi, diantaranya modifikasi bardasarkan rata-rata aritmatik, geometrik, harmonik dan kontra harmonik. Pada Tugas Akhir ini penulis akan memodifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri.

Perhatikan kembali bentuk umum Runge-Kutta orde-4 Kutta, yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{4.1}$$

Pada persamaan (4.1) dibentuk rumusan baru yang mengandung unsur aritmatik, yakni sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1}{2} + \frac{3k_2}{2} + \frac{3k_3}{2} + \frac{k_4}{2}\right) \\ &= y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{2} + \frac{k_3}{2} + \frac{k_3}{2} + \frac{k_4}{2}\right) \end{aligned}$$

Sehingga terbentuk :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right) \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) adalah metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata aritmatik. Dimana bentuk $\frac{k_i + k_{i+1}}{2}$ adalah rata-rata aritmatik untuk dua variabel. Kemudian mengganti bentuk rata-rata aritmatik tersebut dengan rata-rata geometri, sehingga terbentuk :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\ \right)$$

dapat disederhanakan menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1 k_2} + 2\sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\right) \tag{4.3}$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(y_i) = hf \\
k_2 &= f(y_i + hq_{11}k_1) \\
k_3 &= f\big(y_i + h(q_{21}k_1 + q_{22}k_2)\big) \\
k_4 &= f\big(y_i + h(q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)\big)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Bentuk $\sqrt{k_i k_{i+1}}$ didefinisikan sebagai rata-rata geometri, sehingga persamaan (4.3) dikenal sebagai modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri.

Untuk mendapatkan rumusan yang dicari maka yang perlu ditentukan terlebih dahulu nilai $q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33}. Dengan mengekspresikan persamaan (4.4) menggunakan deret Taylor, maka diperoleh nilai k_1, k_2, k_3dan k_4 seperti pada persamaan (2.37) – (2.40).

Langkah selanjutnya adalah dengan mensubstitusikan nilai k_1, k_2, k_3dan k_4 yang diperoleh pada persamaan (2.33) – (2.36) ke persamaan (4.3). Sedangkan untuk menghindari adanya polinomial dalam bentuk akar, digunakan ekspansi deret Binomial pada (2.30) sampai suku ke x^4 sebagai berikut :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{128}x^4$$

Mula-mula dinyatakan $\sqrt{k_i k_{i+1}}$ ke dalam bentuk deret Binomial $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, dengan memisalkan

$$x = \frac{k_i k_{i+1}}{f^2} - 1\,;\, i = 1,2,3 \tag{4.5}$$

Untuk nilai $i = 1$

diperoleh $x = \frac{k_1 k_2}{f^2} - 1$.

Kemudian substitusikan nilai-nilai k_1 dan k_2 yang telah diperoleh dari (2.33) dan (2.34) ke persamaan (4.5). pada langkah selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai x pada (4.5) ke dalam deret Binomial maka akan diperoleh $\sqrt{k_1 k_2}$ dalam bentuk polinomial berikut ini :

$$\sqrt{k_1 k_2} = f + h\left(\frac{q_{11} f f_y}{2}\right) + h^2\left(\frac{q_{11}^2\left(2f^2 f_{yy} - f f_y^2\right)}{8}\right)$$
$$+h^3\left(\frac{q_{11}^3\left(4f^3 f_{yyy} - 6f^2 f_y f_{yy} - 3f f_y^3\right)}{48}\right)$$
$$+h^4\left(\frac{q_{11}^4 f^4 f_{yyyy}}{48} - \frac{q_{11}^4 f^3 f_y f_{yyy}}{24} - \frac{q_{11}^4 f^3 f_{yy}^2}{32} + \frac{3q_{11}^4 f^2 f_{yy} f_y^2}{32}\right.$$
$$\left. - \frac{5q_{11}^4 f f_y^4}{128}\right) \tag{4.6}$$

Dengan cara yang sama, untuk $i = 2$ diperoleh :

$$\sqrt{k_2 k_3} = f + h\left(\frac{(q_{11} + A) f f_y}{2}\right) + h^2\left(\frac{(q_{11}^2 + A^2) f^2 f_{yy}}{4} - \frac{(21A^2 + 21q_{11}^2) f f_y^2}{128}\right.$$
$$\left. + \frac{54 q_{11} q_{22} f f_y^2}{64}\right) + h^3\left(\frac{(q_{11}^3 + A^3) f^3 f_{yyy}}{12} + \frac{(q_{11}^3 + A^3) f f_y^3}{16}\right)$$
$$+h^4\left(\frac{3q_{11}^4 f^2 f_y^2 f_{yy}}{32} - \frac{7q_{11}^4 f^3 f_y f_{yyy}}{128} - \frac{21 q_{22}^4 f^3 f_{yy}^2}{512} - \frac{21 q_{22}^4 f^3 f_{yy}^2}{512}\right.$$
$$\left. - \frac{21 q_{22}^4 f^3 f_{yy}^2}{512} + \cdots\right) \tag{4.7}$$

Selanjutnya untuk i=3 diperoleh :

$$\sqrt{k_3 k_4} = f + h\left(\frac{A f f_y}{2} + \frac{B f f_y}{2}\right)$$
$$+h^2\left(-\frac{A^2 f f_y^2}{8} - \frac{B^2 f f_y^2}{8} + \frac{3 q_{22} q_{33} f f_y^2}{4} + \frac{q_{31} q_{32} f^2 f_{yy}}{2} + \frac{q_{31} q_{33} f^2 f_{yy}}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{q_{32} q_{33} f^2 f_{yy}}{2} + \cdots\right) + h^3\left(\frac{q_{21}^3 f f_y^3}{16} + \frac{q_{22}^3 f f_y^3}{16} + \frac{3 q_{21}^2 q_{22} f f_y^3}{16}\right.$$
$$\left. + \frac{3 q_{22}^2 q_{21} f f_y^3}{16} + \frac{q_{31}^3 f f_y^3}{16} + \frac{q_{32}^3 f f_y^3}{16} + \frac{A^3 f^3 f_{yyy}}{12} + \frac{B^3 f^3 f_{yyy}}{12} + \cdots\right)$$
$$+h^4\left(-\frac{A^4 f f_y^4}{128} - \frac{B^4 f f_y^4}{128} + \cdots\right) \tag{4.8}$$

Kemudian substitusikan nilai-nilai pada ruas kanan $\sqrt{k_1k_2}$, $\sqrt{k_2k_3}$ dan $\sqrt{k_3k_4}$ yang telah diperoleh pada persamaan (4.6), (4.7) dan (4.8) kedalam persamaan (4.3), sehingga persamaan (4.3) menjadi :

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{8}(3q_{11} + 3A + B)ff_y + \frac{h^3}{32}\Big((6A + 36 + 2B^2)f^2f_{yy} \\
+\big((4q_{11}(3q_{22} + A + q_{32}) + 4q_{33}A) + (2AB - 3A^2 - 3q_{11}^2 - B^2)\big)ff_y^2\Big) \\
+h^4\Big(\frac{1}{64}(3q_{11}^3 - 2A^2q_{11} + 8q_{11}^2q_{22} - 2q_{11}^2A - 12Aq_{22}q_{11}B^3 - B^2A \\
+3A^3 - A^2B - 4ABq_{33} + 4A^2q_{32} + 8q_{11}q_{22}q_{33} - 4Bq_{32}q_{11} \\
+4Bq_{22}q_{11} + 4Aq_{11}q_{32})ff_y^3 + \frac{1}{32}(-3A^3 - B^3 + A^2B + 2A^2q_{33} \\
+4ABq_{33} + 2Aq_{11}^2 + 2q_{11}^2q_{32} + q_{11}(2A^2 - 3q_{11}^2 + 6q_{11}q_{22} + 4Bq_{32}) \\
+12Aq_{11}q_{22})f^2f_yf_{yy} + \frac{1}{48}(3A^2 + B^2 + 3q_{11}^3)f^3f_{yyy}\Big) \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Persamaan (4.9) inilah yang nantinya akan dibandingkan dengan ekspansi y_{n+1} di sekitar $x = x_n$ dengan menggunakan deret Taylor satu variabel pada persamaan (2.24) seperti berikut :

$$
y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2}ff_y + \frac{h^3}{6}\left(ff_y{}^2 + f^2f_{yy}\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3f_{yyy} + 4f^2f_yf_{yy} + ff_y^3\right)
$$

Selanjutnya dengan membandingkan koefisien-koefisien pada persamaan (4.9) dengan (2.23) diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut :

$$h^2ff_y : \frac{3q_{11} + 3A + B}{8} = \frac{1}{2}$$

$$h^3ff_y^2 : \frac{q_{11}(3q_{22} + A + q_{32}) + q_{33}A}{8} + \frac{2AB - 3A^2 - 3q_{11}^2 - B^2}{32} = \frac{1}{6}$$

$$h^3f^2f_{yy} : \frac{3A + 3q_{11}^2 + B^2}{16} = \frac{1}{6}$$

$$h^4f^3f_{yyy} : \frac{3A^2 + B^2 + 3q_{11}^3}{48} = \frac{1}{24}$$

$$
\begin{aligned}
h^4ff_y^3 : \frac{3q_{11}^3 - 2A^2q_{11} + 8q_{11}^2q_{22} - 2q_{11}^2A - 12Aq_{22}q_{11}}{64} \\
+\frac{B^3 - B^2A - A^2B + 3A^3 - 4ABq_{33} + 4A^2q_{32}}{64}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{8q_{11}q_{22}q_{33}-4Bq_{32}q_{11}+4Bq_{22}q_{11}+4Aq_{11}q_{32}}{64}=\frac{1}{24}$$

$$h^4f^2f_yf_{yy}\ :\frac{A^2B-3A^3-B^3+2A^2q_{33}+4ABq_{33}+2Aq_{11}^2+2q_{11}^2q_{32}}{32}$$

$$+\frac{q_{11}(2A^2-3q_{11}^2+6q_{11}q_{22}+12Aq_{22}+4Bq_{32})}{32}=\frac{1}{6}$$

Untuk memudahkan mendapatkan nilai parameternya, dilakukan penyederhanaan terlebih dahulu dengan mengambil nilai

$$A=2/3\ \text{ dan }\ B=1$$

Maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$h^2ff_y:\ \frac{3q_{11}}{8}=\frac{1}{8}$$

$$h^3ff_y^2\ :\ \frac{3q_{22}q_{11}+q_{32}q_{11}}{8}+\frac{q_{11}+q_{33}}{12}-\frac{3q_{11}^2}{32}=\frac{19}{96}$$

$$h^3f^2f_{yy}\ :\frac{3q_{11}^2}{16}=\frac{1}{48}$$

$$h^4ff_y^3\ :\frac{3q_{11}^3}{64}-\frac{q_{11}}{72}+\frac{q_{11}^2q_{22}}{8}-\frac{q_{11}^2}{48}-\frac{q_{33}}{72}-\frac{q_{22}q_{11}}{16}-\frac{q_{32}q_{11}}{48}+\frac{q_{22}q_{33}q_{11}}{8}$$
$$=\frac{17}{576}$$

$$h^4f^2f_yf_{yy}\ :\frac{q_{22}q_{11}}{4}-\frac{3q_{11}^3}{32}+\frac{q_{32}q_{11}}{8}+\frac{q_{33}}{9}+\frac{q_{11}^2}{24}+\frac{q_{11}}{36}+\frac{3q_{11}^2q_{22}}{16}+\frac{q_{11}^2q_{32}}{16}$$
$$=\frac{55}{288}$$

$$h^4f^3f_{yyy}\ :\frac{q_{11}^3}{16}=\frac{1}{432} \tag{4.10}$$

Kemudian substitusikan nilai $q_{11}=1/3$ kedalam persamaan (4.10) sehingga akan didapatkan persamaan baru sebagai berikut :

$$\frac{q_{22}}{8}+\frac{q_{32}}{24}+\frac{q_{33}}{12}=\frac{13}{72}$$

$$\frac{q_{22}q_{33}}{24}-\frac{q_{22}}{144}-\frac{q_{32}}{144}-\frac{q_{33}}{72}+=\frac{5}{144}$$

$$\frac{5q_{22}}{48}+\frac{7q_{32}}{144}+\frac{q_{33}}{9}=\frac{11}{72} \tag{4.11}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan pada (4.11), maka didapatlah nilai parameternya, yaitu sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{1}{3} \\
q_{21} &= \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{793}}{36} \\
q_{22} &= \frac{11}{36} + \frac{\sqrt{793}}{36} \\
q_{31} &= -\frac{11}{3} + \frac{\sqrt{793}}{6} \\
q_{32} &= \frac{71}{12} - \frac{\sqrt{793}}{4} \\
q_{33} &= -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{793}}{12} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Langkah terakhir yaitu mensubstitusikan semua nilai parameter yang telah didapat (4.12) ke dalam persamaan (4.3), maka diperoleh modifikasi metode Runge Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri berikut ini :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1 k_2} + 2\sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\right)$$

dengan

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{h}{36}\left(\left(13 - \sqrt{793}\right)k_1 + \left(11 + \sqrt{793}\right)k_2\right)\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + \frac{h}{12}\left(\left(-44 + 2\sqrt{793}\right)k_1 + \left(71 - 3\sqrt{793}\right)k_2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(-15 + \sqrt{793}\right)k_3\right)\right) \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Contoh 4.1 Tentukan aproksimasi dari persamaan diferensial berikut ini :

$y' = y$ dengan nilai awal $y(0) = 1$, $h = 0.1$

Penyelesaian :

Akan ditentukan terlebih dahulu nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 sebagai berikut :

$$k_1 = hy_0 = 0.1$$

$$k_2 = y_0 + \frac{h}{3}k_1$$

$$= 1 + \frac{0.1}{3}(0.1)$$

$$= 1.003333$$

$$k_3 = y_0 + \frac{h}{36}\left(\left(13 - \sqrt{793}\right)k_1 + \left(11 + \sqrt{793}\right)k_2\right)$$

$$= 1 + \frac{0.1}{36}\left(\left(13 - \sqrt{793}\right)(0.1) + \left(11 + \sqrt{793}\right)(1.003333)\right)$$

$$= 1.104929$$

$$k_4 = y_0 + \frac{h}{12}\left(\left(-44 + 2\sqrt{793}\right)k_1 + \left(71 - 3\sqrt{793}\right)k_2\right.$$

$$\left. -\left(15 - \sqrt{793}\right)k_3\right)$$

$$= 1 + \frac{0.1}{12}\left(\left(-44 + 2\sqrt{793}\right)(0.1) + \left(71 - 3\sqrt{793}\right)(1.003333)\right.$$

$$\left. -\left(15 - \sqrt{793}\right)(1.070292)\right)$$

$$= 1.018729$$

Selanjutnya substitusikan nilai k yang diperoleh kedalam persamaan umum metode Runge Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1k_2} + 2\sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right)$$

Sehingga

$$y_1 = 1.09004154$$

Sedangkan solusi eksaknya adalah $y = e^{0.1} = 1.105170918$. Sehingga dengan membandingkan solusi eksak dan solusi hampiran RKKG akan didapatkan nilai galat sebesar $E = 0.0151293$.

4.2 Galat Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Geometri

Untuk mendapatkan galat dari metode Runge Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri dilakukan dengan menggunakan langkah-langkah yang sama untuk menentukan nilai parameter dalam mendapatkan rumusan metode Runge Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri yang telah dibahas dalam sub bab 4.1 sebelumnya.

Nilai parameter $q_{11}, q_{21,} q_{22}, q_{31}, q_{32}$ dan q_{33} yang telah didapat disubstitusikan ke dalam persamaan (4.9) sampai orde-5 $O(h^5)$, maka didapatkan:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + \frac{h^3}{6}\left(ff_y{}^2 + f^2 f_{yy}\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + ff_y^3\right) \\
+ h^5 \left(\frac{11}{1296} f^4 f_{yyyy} + \left(\frac{-467737 + 16709\sqrt{793}}{31104}\right) f^3 f_y f_{yyy}\right. \\
+ \left(\frac{-33 + 5\sqrt{793}}{5184}\right) f^3 f_{yy}^2 + \left(\frac{-6563 + 443\sqrt{793}}{31104}\right) f^2 f_y^2 f_{yy} \\
\left. + \left(\frac{59\sqrt{793} - 2000}{31104}\right) ff_y^4 \right) \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Kemudian bandingkan hasil (4.14) dengan ekspansi Taylor dari y_{i+1} disekitar $x = x_n$ sampai h^5, berikut ini :

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + \frac{h^3}{6}\left(ff_y{}^2 + f^2 f_{yy}\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + ff_y^3\right) \\
+ h^5 \left(\frac{f^4 f_{yyyy} + 7f^3 f_{yy}^2 + 11f^2 f_y^2 f_{yy} + ff_y^4}{120}\right) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Dengan membandingkan hasil (4.14) dan (4.15), maka diperoleh galat metode Runge Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\text{Galat} = h^5 \left(-\frac{1}{6480} f^4 f_{yyyy} - \left(\frac{-2347757 + 83545\sqrt{793}}{155520}\right) f^3 f_y f_{yyy}\right. \\
- \left(\frac{-33 + 5\sqrt{793}}{5184}\right) f^3 f_{yy}^2 - \left(\frac{-47071 + 2215\sqrt{793}}{155520}\right) f^2 f_y^2 f_{yy} \\
\left. - \left(\frac{-11296 + 295\sqrt{793}}{155520}\right) ff_y^4 \right.
\end{aligned}
$$

atau dapat ditulis sebagai :

$$
\begin{aligned}
\text{Galat} = \frac{h^5}{155520}\left(-24f^4 f_{yyyy} - \left(83545\sqrt{793} - 2347757\right) f^3 f_y f_{yyy}\right. \\
-\left(150\sqrt{793} - 990\right) f^3 f_{yy}^2 - \left(2215\sqrt{793} - 47071\right) f^2 f_y^2 f_{yy} \\
-\left(295\sqrt{793} - 11296\right) ff_y^4 \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

4.3 Simulasi Numerik

Untuk melakukan perbandingan komputasi, rumus yang telah diperoleh pada persamaan (4.13) atau disebut juga RKKG akan dibandingkan dengan RKK dan RKKCH diterapkan dalam tiga kasus persamaan diferensial biasa orde-1 secara komputasi numerik dengan menggunakan software Matlab 5.3.

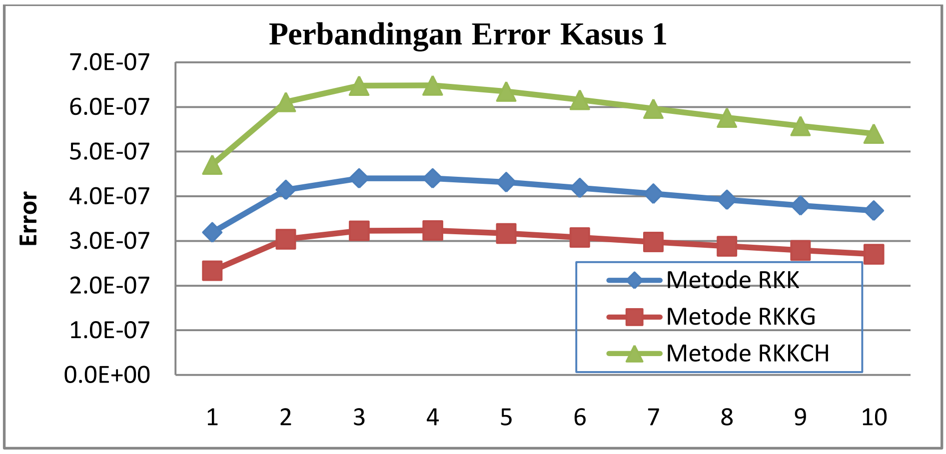
Kasus 1: Persamaan diferensial $y' = \frac{1}{y}$ dengan syarat awal $y(0) = 1,\ \ 0 \le x \le 1{,}25$. Solusi eksak $y(x) = \sqrt{2x+1}$ dengan $h = 0{,}125$ dan n = 10 (Yaacob dan B. Sanugi, 1998).

Hasil eksak dan galat yang terjadi disetiap metode diperlihatkan pada tabel 4.1, yakni sebagai berikut :

Tabel 4.1: Galat Hasil Perhitungan $y' = \frac{1}{y}$

i	x_i	y_i (Solusi Eksak)	*Error*		
			Metode RKK	Metode RKKG	Metode RKKCH
1	0,125	1,1180339887	3,193602E-07	2,339650E-07	4,715722E-07
2	0,250	1,2247448714	4,148485E-07	3,043332E-07	6,114496E-07
3	0,375	1,3228756555	4,403539E-07	3,233058E-07	6,483103E-07
4	0,500	1,4142135624	4,407862E-07	3,237886E-07	6,484746E-07
5	0,625	1,5000000000	4,317287E-07	3,172421E-07	6,348393E-07
6	0,750	1,5811388301	4,192312E-07	3,081299E-07	6,162534E-07
7	0,875	1,6583123952	4,058093E-07	2,983136E-07	5,963793E-07
8	1,000	1,7320508076	3,925393E-07	2,885929E-07	5,767754E-07
9	1,125	1,8027756377	3,798719E-07	2,793045E-07	5,580886E-07
10	1,250	1,8708286934	3,679739E-07	2,705745E-07	5,405541E-07

Berdasarkan tabel 4.1 diperoleh grafik yang ditunjukkan pada gambar 4.1



Gambar 4.1 Grafik perbandingan galat pada kasus 1

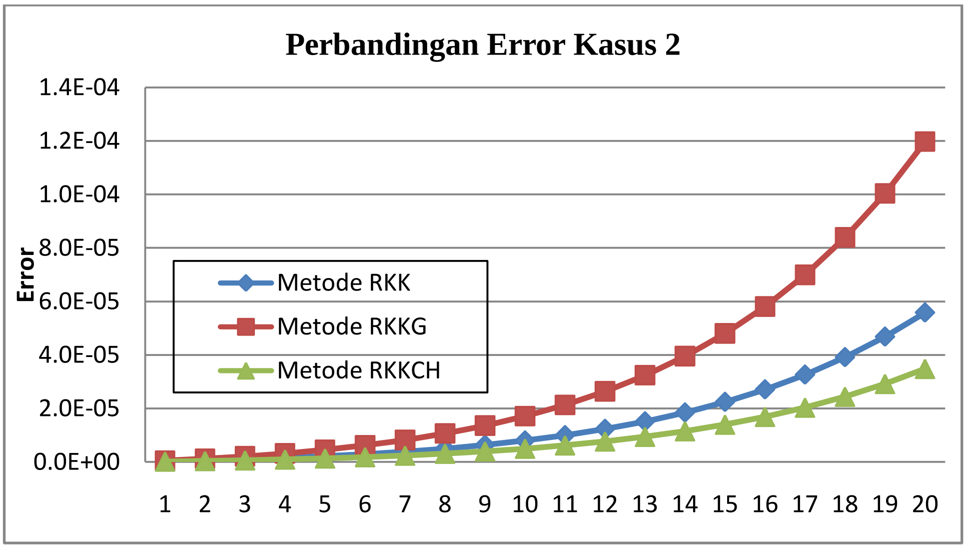
Pada kasus 1 dapat diketahui bahwa metode yang paling baik adalah menggunakan RKKG karena memiliki *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan RKK dan RKKCH.

Kasus 2: Persamaan diferensial $y^{'} = y$ dengan syarat awal $y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 2{,}5$. Solusi eksak $y(x) = \exp(x)$ dengan $h = 0{,}125$ dan n = 20 (Evan, 1991). Hasil eksak dan galat yang terjadi disetiap metode diperlihatkan pada tabel 4.2, yakni sebagai berikut :

Tabel 4.2: Galat Hasil Perhitungan $y^{'} = y$

x_i	y_i (solusi eksak)	*Error*		
		Metode RKK	Metode RKKG	Metode RKKCH
0,125	1,13314845306682	2,59707E-07	5,56775E-07	1,61971E-07
0,250	1,28402541668774	5,88574E-07	1,26182E-06	3,67074E-07
0,375	1,45499141461820	1,00041E-06	2,14474E-06	6,23923E-07
0,500	1,64872127070012	1,51149E-06	3,24041E-06	9,42664E-07
0,625	1,86824595743222	2,14093E-06	4,58983E-06	1,33522E-06
0,750	2,11700001661267	2,91118E-06	6,24114E-06	1,81561E-06
0,875	2,39887529396709	3,84860E-06	8,25083E-06	2,40024E-06
1,000	2,71828182845904	4,98404E-06	1,06850E-05	3,10838E-06
1,125	3,08021684891803	6,35362E-06	1,36212E-05	3,96254E-06
1,250	3,49034295746184	7,99954E-06	1,71498E-05	4,98905E-06
1,375	3,95507672292057	9,97114E-06	2,13766E-05	6,21867E-06
1,500	4,48168907033806	1,23259E-05	2,64250E-05	7,68728E-06
1,625	5,07841903718008	1,51310E-05	3,24387E-05	9,43673E-06
1,750	5,75460267600573	1,84646E-05	3,95854E-05	1,15158E-05
1,875	6,52081912033011	2,24177E-05	4,80601E-05	1,39812E-05
2,000	7,38905609893065	2,70960E-05	5,80898E-05	1,68989E-05
2,125	8,37289748812726	3,26228E-05	6,99384E-05	2,03458E-05
2,250	9,48773583635852	3,91410E-05	8,39124E-05	2,44110E-05
2,375	10,7510131860763	4,68166E-05	1,00368E-04	2,91980E-05
2,500	12,1824939607034	5,58422E-05	1,19717E-04	3,48270E-05

Berdasarkan tabel 4.2 diperoleh grafik yang ditunjukkan pada gambar 4.2



Gambar 4.2 Grafik perbandingan galat pada kasus 2

Pada kasus 2, metode yang paling baik adalah metode RKKCH.

Kasus 3: Persamaan diferensial $y' = \frac{-y^3}{2}$ dengan syarat awal $y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1{,}25$. Solusi eksak $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ dengan $h = 0{,}125$ dan $n = 10$ (Ababneh, dkk, 2009).

Hasil eksak dan galat diperlihatkan pada tabel 4.3, yakni sebagai berikut :

Tabel 4.3: Galat Hasil Perhitungan $y' = \frac{-y^3}{2}$

x_i	y_i (Solusi Eksak)	*Error*		
		Metode RKK	Metode RKKG	Metode RKKCH
0.125	9.42809E-01	1.01407E-07	1.14381E-01	9.66089E-07
0.250	8.94427E-01	1.35192E-07	2.29676E-01	1.32608E-06
0.375	8.52803E-01	1.42359E-07	3.50775E-01	1.42824E-06
0.500	8.16497E-01	1.38826E-07	4.83177E-01	1.41758E-06
0.625	7.84465E-01	1.31187E-07	6.33911E-01	1.35838E-06
0.750	7.55929E-01	1.22282E-07	8.12916E-01	1.28033E-06
0.875	7.30297E-01	1.13345E-07	1.03540E+00	1.19744E-06
1.000	7.07107E-01	1.04894E-07	1.32630E+00	1.11627E-06
1.125	6.85994E-01	9.71191E-08	1.72896E+00	1.03973E-06
1.250	6.66667E-01	9.00607E-08	2.32188E+00	9.68946E-07

Dari tabel 4.3 dapat diketahui bahwa metode yang paling baik untuk kasus 3 adalah metode RKK.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri (RKKG) adalah :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\sqrt{k_1k_2} + 2\sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{h}{36}\left(\left(13 - \sqrt{793}\right) k_1 + \left(11 + \sqrt{793}\right)k_2\right)\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + \frac{h}{12}\left(\left(-44 + 2\sqrt{793}\right) k_1 + \left(71 - 3\sqrt{793}\right)k_2 - \left(15 - \sqrt{793}\right)k_3\right)\right)$$

Sedangkan galat dari RKKG adalah :

$$\text{Galat RKKG} = \frac{h^5}{155520}\left(-24f^4 f_{yyyy} - \left(83545\sqrt{793} - 2347757\right) f^3 f_y f_{yyy} - \left(150\sqrt{793} - 990\right) f^3 f_{yy}^2 - \left(2215\sqrt{793} - 47071\right) f^2 f_y^2 f_{yy} - \left(295\sqrt{793} - 11296\right) f f_y^4\right)$$

Berdasarkan simulasi numerik yang diterapkan pada tiga kasus persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan metode RKK, RKKG dan RKKCH diketahui bahwa untuk kasus 1 yakni persamaan $y' = \frac{1}{y}$, metode yang paling baik adalah menggunakan RKKG. Untuk kasus 2 yakni persamaan $y' = y$ metode yang paling baik adalah menggunakan RKKCH, sedangkan untuk kasus 3 $y' = \frac{-y^3}{2}$ metode yang paling baik adalah metode RKK.

5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya membahas modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata geometri. Sedangkan metode Runge-Kutta orde-4 Kutta dapat dimodifikasi menggunakan variasi rata-rata yang lain, misalnya menggunakan rata-rata heronian, rata-rata centroidal dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Ababneh, Osama Yusuf dkk. On Cases of Fourth-Order Runge-Kutta Methods, *European Journal of Scientifiec Research*. Vol 31, pp 605-615. 2009.

Ababneh, Osama Yusuf dkk. New Multi-step Runge-Kutta Method, *Universitas Kebangsaan Malaysia*. Vol 3, pp 2255-2262. 2009.

Agbeboh, G. U dkk. Implementation of a New 4th Order Runge Kutta Formula for Solving Initial Value Problems (I.V.Ps), *International Journal of Physical Sciences*. Vol.2 (4),pp 089-098. 2007.

Capra, S.C. dan R.P. Canale, *Metode Numerik untuk Teknik.* UI-Press: Depok. 1991.

Evan D. J. A New 4th Order Runge-Kutta Method For Initial Value Problems with Error Control, *Intern. J. Computer Math*. Vol 39, pp 217-227. 1991.

Finizio, N dan Ladas. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, edisi kedua. Erlangga: Jakarta.1988.

Bronson, Richard dan Gariel Costa. *Persamaan Diferensial*, edisi tiga. Erlangga: Jakarta. 2007.

Djojodihardjo, Harijono. *Metode Numerik*. PT Gramedia Pustaka Utama: Jakarta. 2000.

Imran, M. Perbandingan Modifikasi Metode RK-4 Berdasarkan Variasi Rata-rata, *Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau*. 2002.

Lapidus, Leon dkk. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Academic Press: New York and London.1971.

Martono, K. *Kalkulus*. Erlangga: Bandung. 1999.

Mathews, Jhon. *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, Second edition. Prentice Hall International: New York. 1992.

Milner, S. J. The Arithmetic and Geometric Mean Inequality, *The Ohio State University*. 2003.

Munif, Abdul dan Prastyoko. *Metode Numerik*, edisi kedua. Guna Widya: Surabaya. 2003.

Munir, Rinaldi. *Metode Numerik*, edisi revisi. Informatika: Bandung. 2006.

Sanugi, B. B. dan D. J. Evans. A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean, *Intern. J. Computer Math*. Vol. 50, pp. 113-118. 1994.

Sd Conte dan Boor. *Dasar-dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma*, edisi 3. Erlangga: Jakarta. 1998.

Yacob, Nazeeruddin dan B. Sanugi. A New Fourth-Order Embedded Method Based on The Harmonic Mean. *Universitas Teknologi Malaysia*. Jilid 14, hal.1-6.1998.